

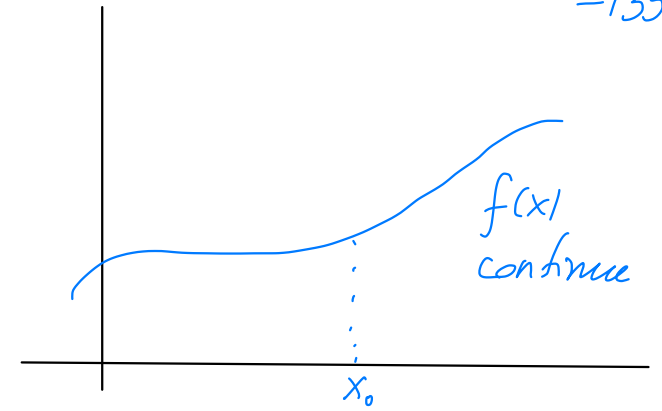
§4.4. Fonctions continues.

-135-

Déf Une fonction $f: E \rightarrow F$ est continue en un point $x_0 \in E$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

3 conditions de
continuité de f
en $x = x_0$

- $$\begin{cases} (1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R} \text{ existe} \\ (2) f \text{ est bien définie en } x = x_0 \\ (3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$



Ex. (1) $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}$ est continue sur $\mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow a} x^p = a^p \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(2) Tout polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ (opération algébriques).

(3) Toute fonction rationnelle sur son domaine

(4) $f(x) = \sqrt[p]{x}$ est continue sur son domaine $\forall p \in \mathbb{N}$ ($\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{a}$, $a > 0$)

(5) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \sin x &= \sin a \quad \text{Dém.} \quad |\sin x - \sin a| = \left| \sin\left(\frac{x+a}{2} + \frac{x-a}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+a}{2} - \frac{x-a}{2}\right) \right| = \\ &= \left| \cancel{\sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cos\left(\frac{x-a}{2}\right)} + \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) - \cancel{\sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cos\left(\frac{x-a}{2}\right)} + \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| = \\ &= 2 \left| \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \end{aligned}$$

$$\underbrace{1}_{1 \leq 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a}$$

Critère de Cauchy pour les fonctions continues.

$f: E \rightarrow F$ définie au voisinage de $x = x_0$ **et en x_0** . Alors f est continue en $x = x_0$ $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \{x \in E : |x - x_0| \leq \delta\}$, on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$.
si et seulement si

Déf $f: E \rightarrow F$ est dite continue à droite (à gauche) en $x_0 \in E$ si
 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

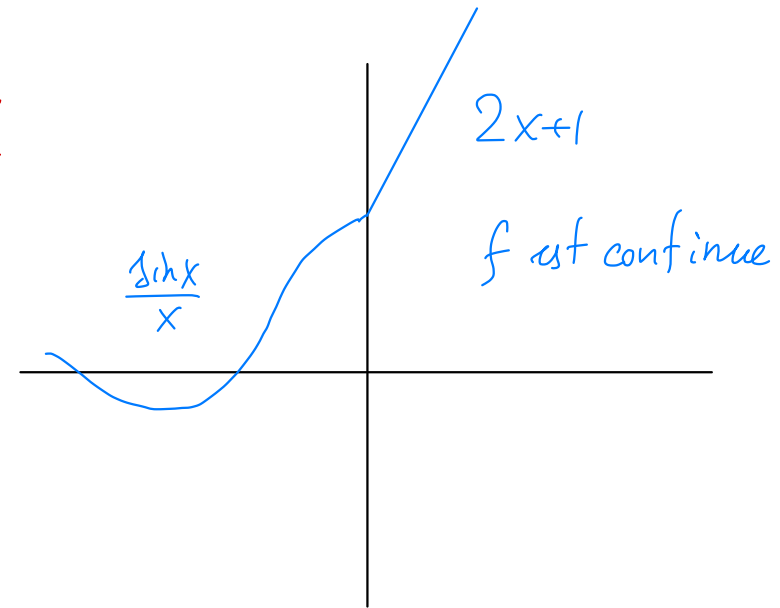
Remarque. f est continue en $x = x_0 \iff$ elle est continue à gauche et à droite en x_0 .

Ex. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ \frac{\sinh x}{x}, & x < 0 \end{cases}$ Étudier la continuité de f en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sinh x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f(0) = (2x+1)|_{x=0} = 1$$

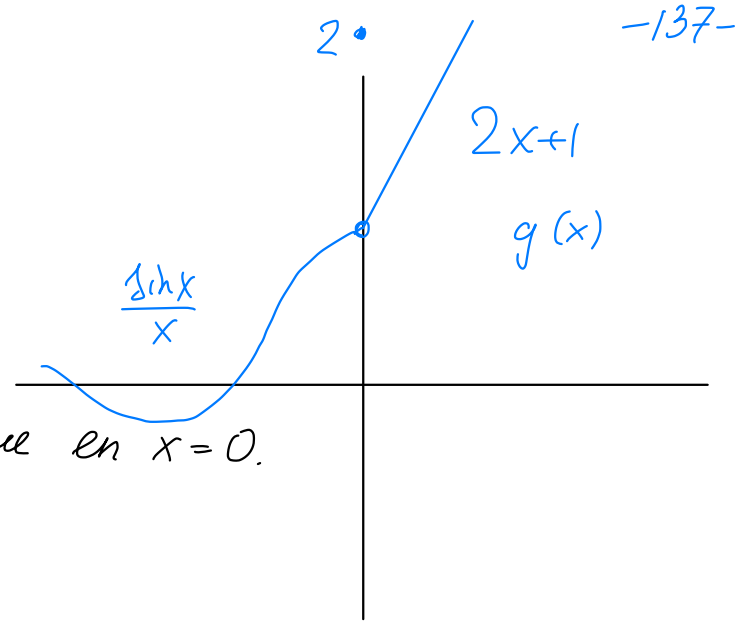
$\Rightarrow f(x)$ est continue en $x = 0$



Ex $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ \frac{\sinh x}{x} & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

Mais $g(0) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \Rightarrow g(x)$ n'est pas continue en $x=0$.



Opérations sur les fonctions continues.

Si f et g sont continues en $x = x_0$, alors

(1) $\alpha f + \beta g$ est continue en $x = x_0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2) $f \cdot g$ est continue en $x = x_0$

(3) $\frac{f}{g}$ est continue en $x = x_0$ si $g(x_0) \neq 0$

(4) Si $f: E \rightarrow F$ et $g: G \rightarrow H$, $f(E) \subset G$, et f est continue en $x_0 \in E$ et g est continue en $f(x_0) \in G$. Alors $(g \circ f)$ est continue en x_0 .

Ex. $f(x) = \frac{\sinh(x^2 + 8x + 1)}{\sqrt{x^2 + 5 + \cos x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Remarque, $(g \circ f)$ est continue en $x = x_0 \not\Rightarrow$ f continue en x_0
 g continue en $f(x_0)$
 (Voir [DZ § 4.3.10]).

Prolongement par continuité d'une fonction en un point.

Déf. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction telle que $c \notin E$ (f n'est pas définie en $x=c$) et $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$ existe. Alors la fonction $\hat{f}: E \cup \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\hat{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & x \in E \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x), & x = c. \end{cases}$$

est appelée **le prolongement par continuité** de f au point $x=c$.
Un tel prolongement est unique et la fonction $\hat{f}$ est continue en $x=c$.

Ex 1. $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

$\Rightarrow$ le prolongement par continuité $\hat{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{f} \text{ continue sur } \mathbb{R}.$

Ex 2. $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{e^{2x}-1}$ sur $[-4, 0[\cup]0, \infty[$

Trouver le prolongement par continuité en $x=0$ s'il existe.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{e^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{\sqrt{x+4}+2} \cdot \frac{1}{e^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}}_{\rightarrow \frac{1}{4}} \cdot \underbrace{\frac{2x}{e^{2x}-1}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$\Rightarrow \hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{e^{2x}-1}, & x \in [-4, 0[\cup]0, \infty[\\ \frac{1}{8}, & x = 0. \end{cases}$$

$$D(\hat{f}) = [-4, \infty[$$

§4.5. Fonctions continues sur un intervalle

-139-

Déf. Une fonction $f: I \rightarrow F$ où I est un intervalle ouverte non-vide est continue sur I si f est continue en tout point $x \in I$.

$f: [a, b] \rightarrow F$ est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en $x = b$ et à droite en $x = a$. ouvert

Ex. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+3} & x \neq -\frac{3}{2} \\ 0 & x = -\frac{3}{2} \end{cases}$ est continue sur $]-\frac{3}{2}, 5[$; sur $[-1, 5]$, sur $]-\frac{3}{2}, \infty[$
elle n'est pas continue sur $[-\frac{3}{2}, 5]$.

Théorème Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow F$ une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$. Alors f atteint son infimum et son supremum sur $[a, b]$.

$$\left(\Leftrightarrow \exists \max_{[a, b]} f(x) \text{ et } \exists \min_{[a, b]} f(x) \right)$$

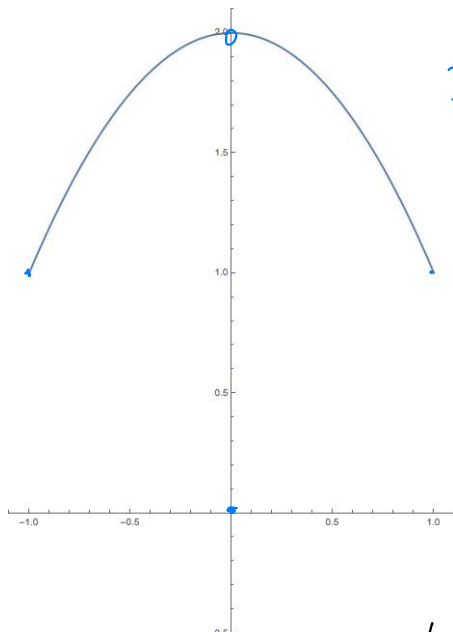
Exercice: Démontrer que f est bornée.

Démonstration:

[Voir DZ §4.3.2]

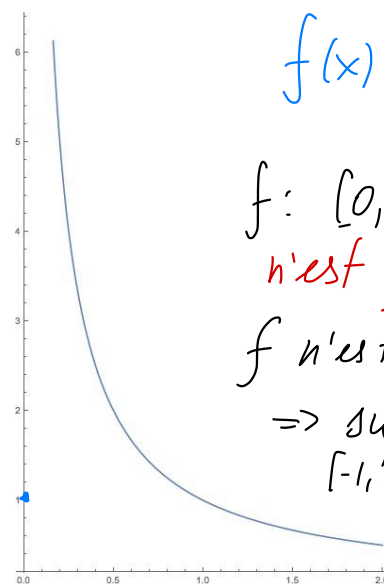
Remarques

(1) Thm: Une fonction *continue* sur un intervalle fermé borné atteint son inf. ⁻¹⁴⁰⁻ son sup.



$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

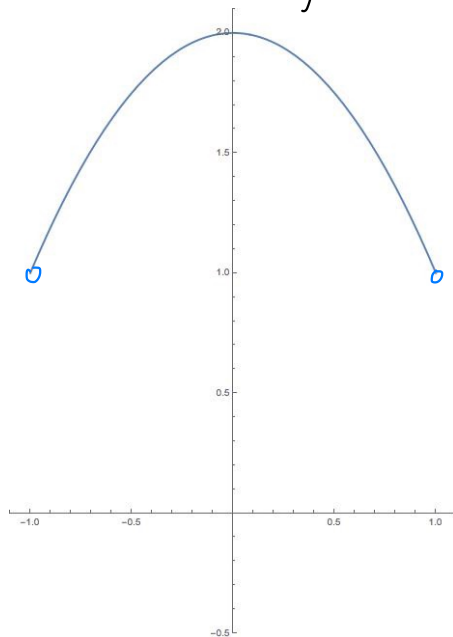
$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue
en $x=0$; $\sup_{[-1, 1]} f(x) = 2$, mais
 f n'atteint pas son sup sur $[-1, 1]$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in]0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
n'est pas continue en $x=0$.
 f n'est pas bornée sur $[-1, 1]$
 $\Rightarrow \sup f$ n'existe pas.

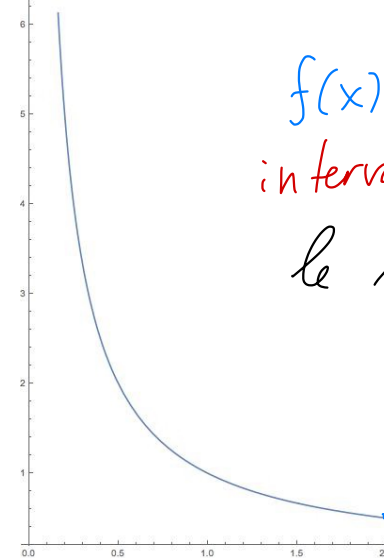
(2) Thm: Une fonction continue sur un intervalle *fermé* borné atteint son sup et inf.



$$f(x) = 2 - x^2 :]-1, 1[\subset \mathbb{R}$$

intervalle ouvert

$\inf_{]-1, 1[} f = 1$, mais f
n'atteint pas son inf
sur $]-1, 1[$



$$f(x) = \frac{1}{x} :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

intervalle semi-ouvert

le sup f n'existe pas
sur $]0, 1]$.

Théorème de la valeur intermédiaire (TVI)

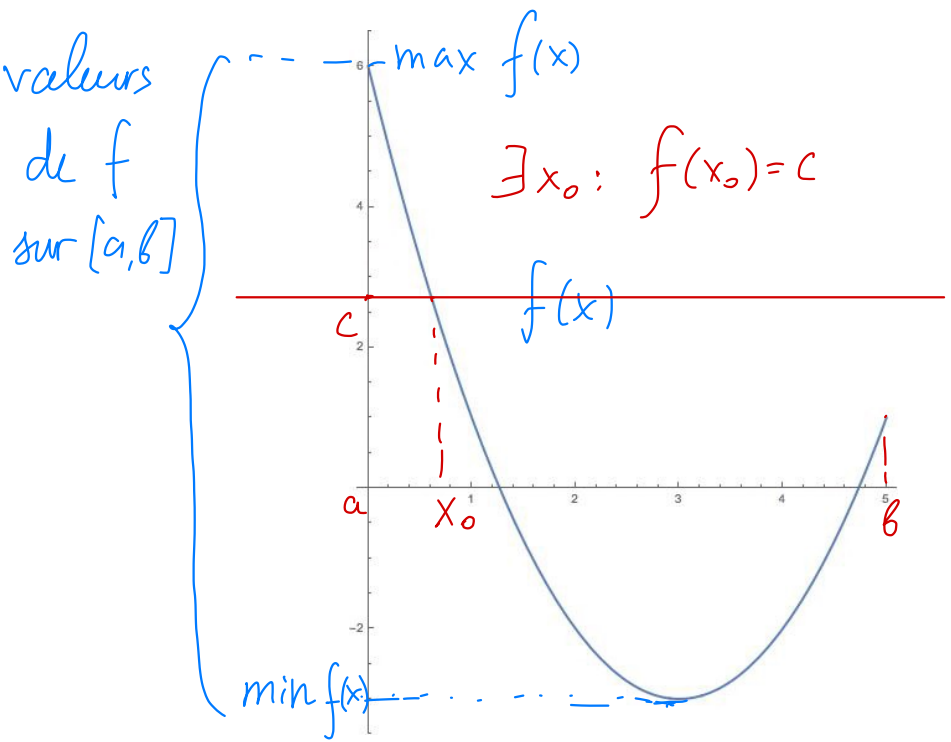
Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint son sup, son inf et toute valeur comprise entre les deux.

$$f([a, b]) = [\min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x)] \quad [DZ \S 4.3.22]$$

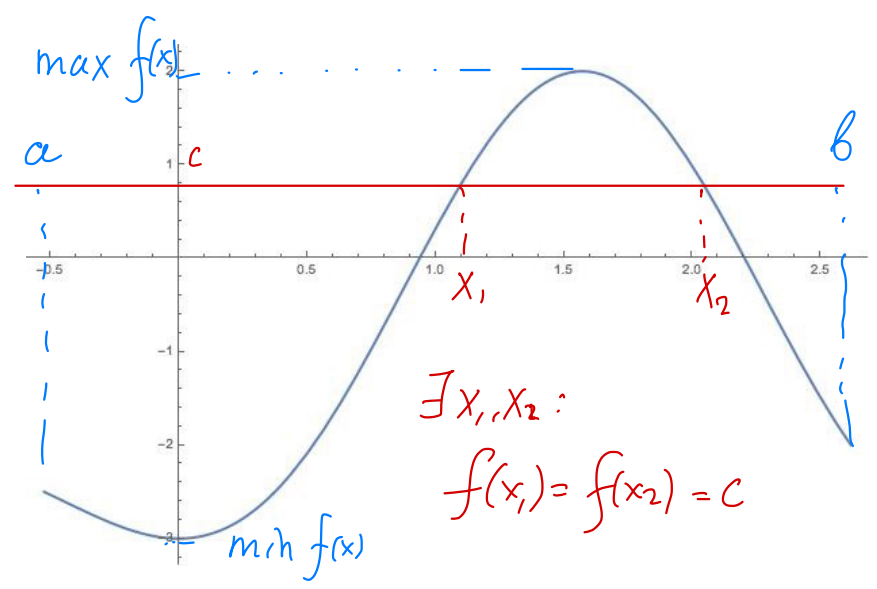
En particulier, f atteint toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$

Thm: $\forall c \in [\min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x)] \exists$ au moins un $x : f(x) = c$.

Ex 1.



Ex 2.



-142-

Corollaire 1. Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[: f(c) = 0$.

Ex Démontrer que l'équation $\sin x + \frac{1}{x-4} = 0$ possède au moins deux solutions sur $[0, \pi]$.

$f(x) = \sin x + \frac{1}{x-4}$ est continue sur $[0, \pi]$. - fermé borné.
 $\Rightarrow$ Le théorème de la valeur intermédiaire s'applique

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \sin 0 + \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} < 0 \\ f(\pi) = \sin \pi + \frac{1}{\pi-4} = 0 + \frac{1}{\pi-4} < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}-4} = 1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2}-4} > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Rightarrow \\ \exists \text{ au moins un } x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \\ f(x_1) = 0. \\ \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot f(\pi) < 0 \Rightarrow \exists \text{ au moins} \\ \text{un } x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] : f(x_2) = 0. \\ x_1 \neq x_2 \text{ parce que } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0. \end{array}$$

$\Rightarrow \exists$ au moins 2 solutions de l'équation $f(x) = 0$.
sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Ex. Démontrer qu'il existe une solution de l'équation $\cos x = x$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$f(x) = \cos x - x$ continue sur $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Par le TVI il existe au moins une solution de l'équation } \cos x = x \text{ sur }]0, \frac{\pi}{2}[.$$

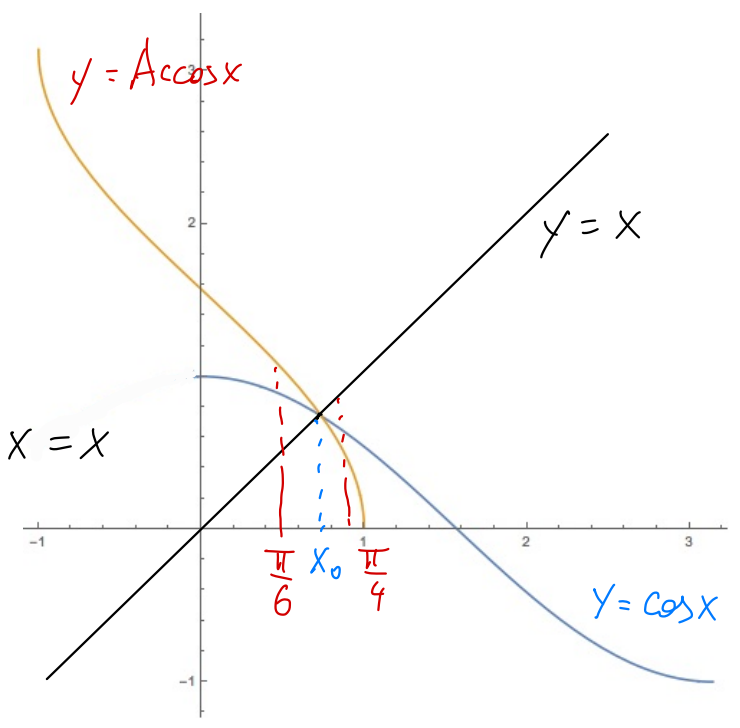
On peut faire mieux:

une solution se trouve dans $] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} [$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\frac{1}{2} < \frac{9}{16}} - \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{> \frac{3}{4}} < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\frac{3}{4} > \frac{9}{16}} - \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{> \frac{3}{4}} > 0$$

$\Rightarrow$ une solution de $\cos x = x$ se trouve dans $] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} [$



Remarque: $\cos x_0 = x_0 \Rightarrow \cos(\cos x_0) = \cos x_0 = x_0 \Rightarrow \cos x_0 = \arccos x_0$.
 $\Rightarrow x_0$ est aussi une solution de l'équation $\cos x = \arccos x$.